2. Гарифьянов Ф. Н. *Функциональные уравнения, связанные с автоморфными формами.* – Казань: Изд-во КГЭУ, 2003. – 124 с.

3. Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н. *О лакунарных аналогах тэта-ряда Пуанкаре и их приложении* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 5. – С. 977–986.

4. Туре Б. *Многоэлементные уравнения для функций, голоморфных в плоскости с разрезом* // Ред. ж. Изв. вузов. Матем. – Казань, 2006. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.04.06. – № 375-В2006.

5. Зверович Э. И. *Двухэлементные краевые задачи и метод локально-конформного склеивания* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т. 14. – № 1. – С. 64–85.

6. Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана* // Изв. вузов. Матем. – 1983. – № 4. – С. 43–51.

А. С. Белов

Иваново, asbel@ivanovo.ac.ru

НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Пусть $S_n(x)$ и $\sigma_n(x)$, $n \geqslant 0$, обозначают, соответственно, частные суммы и средние Фейера тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

Как обычно, $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Хорошо известно, что если ряд (1) является рядом Фурье, то его частные суммы сходятся (ограничены) в метрике $L_{2\pi}$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - S_n(x)|\,dx = o(1) \quad (\text{соотв.} = O(1)\,). \tag{2}$$

Поэтому (см. [1]) представляет интерес задача описания условий на коэффициенты ряда (1), при которых верно (2).

Автором (см. [2]) доказана следующая

Теорема 1. *Пусть существуют такие числа $p > 1$ и $C > 0$, что*

$$2^{n(p-1)} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} (\,|\Delta a_k|^p + |\Delta b_k|^p\,) \leqslant C\,n^p \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Тогда условие (2) *эквивалентно условию*

$$(\,|a_n| + |b_n|\,)\ln n = o(1) \quad (\textit{соотв.} = O(1)\,). \tag{4}$$

Также верна

Теорема 2. *Пусть существуют такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что при $n \geqslant 1$*

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} (\,(|\Delta a_k| - C_1 n 2^{-n}\,)^+ + (|\Delta b_k| - C_1 n 2^{-n}\,)^+\,) \leqslant \frac{C_2}{n}. \tag{5}$$

Тогда условие (2) *эквивалентно условию*

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|a_k| + |b_k|}{|k-n|+1} = o(1) \quad (\textit{соотв.} = O(1)\,). \tag{6}$$

Отметим, что из условия (4) вытекает условие (6), а при условии (3) условия (4) и (6) эквивалентны. Теоремы 1 и 2 неулучшаемы даже для рядов Фурье. Верны следующие две теоремы.

Теорема 3. *Для любого $p \in (1,\infty)$ и произвольной неограниченной последовательности неотрицательных чисел $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить такую последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, что оба тригонометрических ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{7}$$

являются рядами Фурье с неограниченными в метрике $L_{2\pi}$ частными суммами и выполнены условия $a_n \ln n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$2^{n(p-1)} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} |\Delta a_k|^p \leqslant \Phi(n)\, n^p \text{ при всех } n \geqslant 1.$$

Теорема 4. *Для любой неограниченной последовательности неотрицательных чисел $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить такую последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, что оба тригонометрических ряда (7) являются рядами Фурье с неограниченными в метрике $L_{2\pi}$ частными суммами и выполнены условия $a_n \ln n \to 0$ при $n \to \infty$ и*

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} |\Delta a_k| \leqslant \frac{\Phi(n)}{n} \quad \text{при всех } n \geqslant 1.$$

Теоремы 3 и 4 показывают, что условия (3) и (5) в теоремах 1 и 2 неулучшаемы даже для рядов Фурье в том смысле, что правые части этих условий имеют правильный порядок.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00302).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов А. С. *Замечания о сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71. – № 6. – С. 807–817.

2. Белов А. С. *Об условиях сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда* // Вест. Ивановск. ун-та. Сер. “Биол. Химия. Физика. Матем.”. – 2004. – Вып. 3. – С. 109–120.

М. С. Беспалов

Владимир, besp@vlsu.ru

СОБСТВЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША

Рассмотрены дискретные преобразования Уолша [1] четырех нумераций — Пэли, Уолша, Адамара и новой нумерации [2], обладающей свойствами симметрии по вертикали и горизонтали. Обозначим через W матрицу (порядка 2^n) любого из перечисленных преобразований, а $\lambda = \sqrt{2^n}$.

Теорема. *Собственные числа оператора* W *равны* $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$.

В случае нумерации Пэли и четного n размерность собственных подпространств равна $2^{n-1} + 2^{n/2-1}$ (для числа λ_1) и $2^{n-1} - 2^{n/2-1}$ (для числа λ_2). Для нумерации Пэли в случае нечетного n, а также для трех других нумераций размерности собственных подпространств совпадают и равны 2^{n-1}.

Для нумерации Адамара и для новой нумерации начальные 2^{n-1} столбцов матриц $W \pm \lambda E$ составляют базис соответствующих собственных подпространств.

Для нумераций Пэли и Уолша также найдены [3] принципы выделения базиса собственных подпространств из столбцов матриц $W \pm \lambda E$.